

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**  
**Sessione straordinaria**

**8** Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots 100^2.$$

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**  
**Sessione straordinaria**

**8** Considerata la successione  $a_n = n^2$ , si dimostra per induzione che la somma dei primi  $n$  termini vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Infatti, per  $n=1$ ,  $S_1 = 1^2 = 1$  e  $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$ , pertanto l'espressione sopra è vera; ora, posto  $S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ , è necessario dimostrare che  $S_{n+1} = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$ .

Considerati i primi termini della successione:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + 2 \cdot 2 = S_1 + 2^2$$

$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 3 = S_2 + 3^2$$

...

ricaviamo che:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{1}{6} (n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)] = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) = \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)[2(n+1)+1] \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

La somma  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$  è uguale a  $S_{100}$  e quindi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350.$$