7 Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4} n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3} n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

7 In generale risulta:

$$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2+2(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+1\cdot n+2\cdot 3+\ldots+2\cdot n+\ldots+(n-1)\cdot n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\left(\sum_{k\neq h} hk\right) \Rightarrow \sum_{k\neq h} hk = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right].$$

Valgono le seguenti relazioni, che si dimostrano facilmente per induzione:

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Si ha infine: $\sum_{k\neq h} hk = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right] = \frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$. La risposta D è quella esatta.