PROBLEMA 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{i,\,k=1}^{n} ik,\ b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2,\ c_n = \sum_{\substack{i,\,k=1\\(k\geq i)}}^{n} ik.$$

a) Dimostrare che risulta:

$$a_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\ b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\qquad c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

b) Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera 100 000.

c) Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.

d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

PROBLEMA 2

a) Si dimostrano le relazioni attraverso il principio di induzione matematica.

a1) Si deve dimostrare che $\sum_{i,\,k=1}^{n} ik = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

Per $n=1$, $a_1 = 1 \cdot 1 = 1$ e $\frac{1}{4} 1^2(1+1)^2 = 1$, pertanto la relazione precedente è vera; ora, posto $a_n = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$, bisogna dimostrare che $a_{n+1} = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$.

Consideriamo i primi termini della successione a_n:

$$a_1 = 1 \cdot 1$$

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = a_1 + 2(1 \cdot 2) + 2 \cdot 2$$

$$a_3 = a_2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = a_2 + 2(1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) + 3 \cdot 3$$

$\ldots$

Possiamo dedurre che in generale:

$$a_{n+1} = a_n + 2[1(n+1) + 2(n+1) + 3(n+1) + \ldots + n(n+1)] + (n+1)(n+1) =$$

$$= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + 2(n+1)(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)(n+1).$$

Essendo $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ si ottiene:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 n + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{1}{4} n^2 + n + 1\right) = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

come volevasi dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{i,\,k=1}^{n} ik = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

a2) Si deve dimostrare che $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Per $n=1$, $b_1 = 1^2 = 1$ e $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, perciò la precedente relazione è vera; ora, posto $b_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, è necessario dimostrare che $b_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$.

Consideriamo i primi termini della successione b_n:

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1 + 4 = b_1 + 2^2$$

$$b_3 = 1 + 4 + 9 = b_2 + 3^2$$

$\ldots$

In generale, deduciamo che:

$$b_{n+1} = b_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6n+6) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+3n+4n+6) = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+3)+2(2n+3)] =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$$

come volevasi dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

a3) Dobbiamo dimostrare che $\sum_{\substack{i,k=1\\(k\geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

Per $n=1$, $c_1 = 1\cdot 1 = 1$ e $\frac{1}{24}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 1$, pertanto la relazione sopra è vera; ora, posto

$$c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

bisogna dimostrare che $c_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)$.

Consideriamo i primi termini della successione c_n:

$c_1 = 1\cdot 1 = 1$

$c_2 = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 2 = c_1 + 2(1+2)$

$c_3 = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 = c_2 + 3(1+2+3)$

…

In generale, deduciamo che:

$$c_{n+1} = c_n + (n+1)[1+2+\ldots+n+(n+1)] = c_n + (n+1)\frac{(n+1)(n+2)}{2} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2).$$

Sostituendo $c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$, risulta:

$$c_{n+1} = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2) = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(3n^2+n+12n+12),$$

per la scomposizione dei polinomi, $3n^2+13n+12 = (n+3)(3n+4)$,

$$c_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4),$$

come si voleva dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{\substack{i,k=1\\(k\geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

b) Essendo $a_n = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$, si ponga $\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \leq 100\,000$. Si risolve la disequazione in $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \leq 100\,000 \quad \rightarrow \quad n(n+1) \leq \sqrt{400\,000} \quad \rightarrow \quad n^2 + n - 200\sqrt{10} \leq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 800\sqrt{10}}}{2}.$$

Poiché $\frac{-1 + \sqrt{1 + 800\sqrt{10}}}{2} \simeq 24{,}6$, il massimo valore di n per cui a_n non supera 100 000 è $n = 24$.

c) Considerata la successione $c_n = \sum_{\substack{i,\,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$, nel punto a3) del problema si era trovato che $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2)$; pertanto la definizione per ricorsione della successione è:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2) \end{cases}.$$

d) Utilizziamo l'ambiente Excel.

Aperto un foglio di lavoro, si opera secondo i seguenti passaggi:

- si raccolgono nelle prime 20 righe della prima colonna (colonna A) i valori dell'indice n che vanno dall'1 al 20; per questo nella cella A1 si scrive 1, nella cella A2 si scrive `=A1 + 1` e la si copia fino ad A20;
- nella colonna B si calcolano i primi 20 valori della successione c_n; perciò si immette nella cella B1 il valore di c_1, cioè 1, nella cella B2 si scrive `=B1 + (A1 + 1)^2*(A1 + 2)/2` e si copia dalla cella B3 alla B20;
- i valori trovati di c_n, posti nelle prime 20 righe della colonna B, si ridispongono in una matrice 5×4 collocata dalla cella D1 alla cella G5; pertanto in D1 si scrive `=B1` e si copia fino alla cella D5; in E1 si scrive `=B6` e si copia fino alla cella E5; in F1 si scrive `=B11` e si copia fino alla cella F5; in G1 si scrive `=B16` e si copia fino alla cella G5.

La matrice ottenuta ha i valori dei primi 20 termini della successione c_n posti in colonna ossia così collocati:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_6 & c_{11} & c_{16} \\ c_2 & c_7 & c_{12} & c_{17} \\ c_3 & c_8 & c_{13} & c_{18} \\ c_4 & c_9 & c_{14} & c_{19} \\ c_5 & c_{10} & c_{15} & c_{20} \end{bmatrix}.$$

▼ **Figura 3.**

E

