ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

5 Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10 000.

5 L'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ può essere scritta come $1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k$. Il secondo addendo rappresenta la somma S_n dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q = 3$, con primo termine $a_1 = 3$. Per il teorema sulla somma parziale di una progressione geometrica, tale somma vale $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ e quindi si può scrivere:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 3^k = 1 + 3\frac{3^n - 1}{3 - 1} = 1 + \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}.$$

Affinché tale sommatoria non superi 10 000 deve valere:

$$\frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \leq 10\,000 \quad \rightarrow \quad 3^{n+1} \leq 20\,001.$$

Passando ai logaritmi naturali otteniamo:

$$\ln 3^{n+1} \leq \ln 20\,001$$

$$(n+1)\ln 3 \leq \ln 20\,001$$

$$n + 1 \leq \frac{\ln 20\,001}{\ln 3} \simeq 9{,}015$$

$$n \leq 9{,}015 - 1 \quad \rightarrow \quad n \leq 8{,}015$$

Essendo n un numero naturale, si conclude che il valore cercato è $n = 8$.

