

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

- 5** Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «*teorema di Nicomaco*» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

5 Il principio d'induzione matematica si può formulare nel seguente modo. Data una proposizione $P(n)$ il cui enunciato dipenda da n , con $n \geq 1$ naturale, se:

- P è vera per $n = 1$;
- supposta P vera per n , è vera anche per $n + 1$,

allora essa è vera per qualsiasi $n \geq 1$.

Si consideri ora la relazione $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$. Se $n = 1$, i due membri diventano rispettivamente $\sum_{i=1}^1 i^3 = 1$ e $\left(\sum_{i=1}^1 i\right)^2 = 1$. Essi sono uguali e si deduce che la proposizione è vera per $n = 1$. Supposta vera la relazione $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$, bisogna dimostrare che vale $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$.

Si consideri la somma $\sum_{i=1}^{n+1} i^3$. Essa può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 + (n+1)^3.$$

Poiché $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ per il teorema sulla somma di n termini di una progressione aritmetica, risulta $\left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ e l'espressione sopra diventa:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Applicando nuovamente il teorema poc'anzi ricordato, vale $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$, pertanto risulta:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2, \text{ come si voleva dimostrare.}$$

In conclusione, la proposizione $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$ è vera per il principio di induzione.