2 Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10 000.

2 L'espressione $\sum_{k=5}^{n} k$ rappresenta la somma di $(n-5)+1=n-4$ termini consecutivi della progressione aritmetica di ragione 1: $a_n = a_{n-1}+1$, con $a_0=0$. Quindi la somma $\sum_{k=5}^{n} k$ si può esprimere come la media aritmetica del primo e ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini:

$$\sum_{k=5}^{n} k = \frac{a_5+a_n}{2}(n-4) = \frac{5+n}{2}(n-4) = \frac{1}{2}(n^2+n-20).$$

Imponendo la condizione $\frac{1}{2}(n^2+n-20) \leq 10\,000$, si ottiene la disequazione di secondo grado $n^2+n-20\,020 \leq 0$ che in $\mathbb{R}$ è verificata per $\frac{-1-\sqrt{80\,081}}{2} \leq n \leq \frac{-1+\sqrt{80\,081}}{2}$. Poiché n è un numero naturale e $\frac{-1+\sqrt{80\,081}}{2} \simeq 140{,}993$, si conclude che il più grande valore di n che soddisfa il quesito è $n=140$.

Infatti $\sum_{k=5}^{140} k = 9860$ e $\sum_{k=5}^{141} k = 10\,001$.