8 Calcolare il valore della seguente somma:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2$.

8 Considerata la successione $a_n = n^2$, si dimostra per induzione che la somma dei primi n termini vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Infatti, per $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ e $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, pertanto l'espressione sopra è vera; ora, posto $S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, è necessario dimostrare che $S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$.

Considerati i primi termini della successione:

$S_1 = 1$

$S_2 = S_1 + 2 \cdot 2 = S_1 + 2^2$

$S_3 = S_2 + 3 \cdot 3 = S_2 + 3^2$

…

ricaviamo che:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2.$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$$

come volevasi dimostrare.
La somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2$ è uguale a S_{100} e quindi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350.$$

